Toets foutenanalyse 25 oktober 2010 09:00 - 11:00

2/5/4½/5

1A $[\Delta p] = M L^{-1} T^{-2}$

$[\sigma] = M L T^{-2} \cdot L^{-1}$ dus $[\sigma] = M T^{-2}$

$[R] = L$

$[\Delta p] = [\sigma^a R^b]$

$M L^{-1} T^{-2} = (M L^0 T^{-2})^a (L)^b$

M : $1 = a$ $a = 1$

L : $-1 = b$ en $b = -1$

T : $-2 = -2a$

Dus $\Delta p = \alpha \dfrac{\sigma}{R}$

α = een constante

Δp = de overdruk

R = de straal

σ = de oppervlakkspanning

B $[R_S] = L$

$[R_1] = L$

$[R_2] = L$

$[R_S] = [R_1^a R_2^b]$

L: $1 = a + b$

$a = 1 - b$ en $b = b$

~~Dus~~ Dan geldt $R_S = \alpha \cdot R_1^{1-b} \cdot R_2^b$ α = een constante

$R_S = \alpha \cdot R_1^1 \cdot \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^b$

$R_S = R_1 \cdot F(\pi_1)$ waarbij $\pi_1 = \dfrac{R_2}{R_1}$

(Je kan ook een andere formule krijgen nl: $R_S = R_2 \cdot F(\pi_2)$ waarbij $\pi_2 = \dfrac{R_1}{R_2}$)

2 A

Voor een verdelingsfunctie geldt:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ Dus $A\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx$

$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$

2

Dus $A\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx = A\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$

invullen geeft : $A\left(\left(\frac{1}{2}\pi - 0\right) - (0)\right)$

dit is 1 dus $\frac{1}{2}\pi A = 1$

$A = \frac{2}{\pi}$

Dus de verdelingsfunctie is $F(x) = \frac{2}{\pi}\sin^2(x)$ op het interval $[0, \pi]$

B Voor een gemiddelde waarde μ geldt

$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ Dus bij ons word dat:

$$\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin^2(x)\, dx$$

1

Er geldt $\int x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\left[x^2 - x\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]$

Dus bij ons : $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[x^2 - x\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}$

Invullen geeft : $\frac{1}{2\pi}\left(\left(\pi^2 - 0 - \frac{1}{2}\right) - \left(0 - 0 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

Dus de gemiddelde waarde μ van x op het interval $[0, \pi] = \frac{\pi}{2}$

2 C Voor de standaarddeviatie σ op het interval $[0, \pi]$ geldt:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Dus bij ons geldt:

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2(x)\,dx$$

Er geldt: $\int x^2 \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x)$

(En formules die we eerder in deze opgave hebben gebruikt)

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin^2(x)\,dx - 2\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\left[x^2 - x\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{1}{6}\pi^3 - 0 - \frac{1}{4}\pi + 0\right) - (0 - 0 - 0 + 0)\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\left(\pi^2 - 0 - \frac{1}{2}\right) - \left(0 - 0 - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\pi - 0\right) - (0 - 0)\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi^2$$

$\sigma^2 = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}$ dus $\sigma^2 \approx 0{,}32247$ ← (later afronden)

~~$\sigma = 0{,}568$~~ $\sigma = 0{,}57$

3A $f = \frac{R^2}{2d(n-1)}$ $R = (2,21 \pm 0,05)$ cm

$d = (0,6 \pm 0,05)$ cm

$n = 1,5$ (geen fout)

$$f = \frac{(2,21)^2}{2 \cdot 0,6 (0,5)} = 8,14017 \text{ cm} \Leftarrow \text{(later afronden)}$$

$$f = R^2 \cdot 2d^{-1}(n-1)^{-1}$$ n heeft geen fout

de fout in $f \Rightarrow$ $\sigma_f = \sqrt{2^2 \cdot \left(\frac{0,05}{2,21}\right)^2 + (-1)^2 \left(\frac{0,05}{0,6}\right)^2}$

ik gebruik hier de formule $\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{(y_m)^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + (x_m)^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \dots}$

waarbij y_m de macht van y is, dus bij y^2 komt daar een 2 te staan. (het zelfde verhaal voor x_m)

dit geeft:

1½ $\sigma_f = 0,095$ cm naar boven afronden

Dus $\sigma_f = 0,1$ cm

~~Dus $f = (8,14 \pm 0,09)$ cm~~

Dus $f = (8,1 \pm 0,1)$ cm

B

Om het gewogen gemiddelde te berekenen geldt:

$$\text{gewogen gem.} = \frac{\frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{x}{\sigma_x^2} + \dots}{\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_x^2} + \dots}$$

en de fout hierin is $\frac{1}{\sigma_{\langle g \rangle}^2} = \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_x^2} + \dots$

$\sigma_{\langle g \rangle}$ is de fout in het gewogen gemiddelde

Dus ons gewogen gemiddelde =

$$\frac{\frac{8,1}{0,1^2} + \frac{7,9}{0,6^2}}{\frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{0,6^2}} = 8,0946 \text{ cm} \Leftarrow \text{later afronden}$$

3 En de fout hier in is: $\frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{0,6^2} = 102,778$ cm

dus de fout in ons gewogen gemiddelde is

$$\sqrt{\frac{1}{102,778}} = 0,099 \text{ dus } 0,1 \text{ cm}$$

Dus $f_{\langle g \rangle} = (8,1 \pm 0,1)$ cm

($f_{\langle g \rangle}$ is het gewogen gemiddelde)

4A

Er geldt $\ln(N) = a \cdot m + b$

Om de kleinst-kwadraten-methode te gebruiken gebruiken we de volgende formule:

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - f_i)^2$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma^2}$$

Deze som moet minimaal zijn, want we willen de beste lijn door de punten (de kleinst-kwadraten methode dus)

~~In ons~~ ~~voorbee~~ Bij ons word dat dus

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i (\ln(N)_i - a \cdot m_i - b)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i (\ln(N)_i^2 - a m_i \ln(N)_i - \ln(N)_i b - a \cdot m_i \ln(N)_i + a^2 m_i^2 + a m_i b - b \ln(N)_i + a m_i b + b^2)$$

S moet minimaal zijn dit is als de afgeleide nul is, we moeten nu partieel differentiëren:

$$① \quad \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} w_i (-2 m_i \ln(N)_i + 2 a m_i^2 + 2 m_i b)$$

dit moet nul zijn.

$$② \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} w_i (-2 \ln(N)_i + 2 a m_i + 2 b)$$

dit moet nul zijn.

Eerst ② verder uitwerken: $2 \sum_{i=1}^{n} w_i \ln(N)_i - 2 \sum_{i=1}^{n} w_i a m_i = 2 \sum_{i=1}^{n} w_i b$

~~dele~~ keer $\frac{1}{w}$

waarbij $w = \sum_{i=1}^{n} w_i$

$$\frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i \ln(N)_i - \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i a m_i = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i b$$

$$b = \langle \ln(N) \rangle - a \langle m \rangle$$

Nu ① verder uitwerken: $-2 \sum_{i=1}^{n} w_i m_i \ln(N)_i + 2 \sum_{i=1}^{n} a m_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} m_i b = 0$

keer $\frac{1}{w}$, en $\frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i b$ invullen $\Rightarrow$

$$-\frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i m_i \ln(N)_i + \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} a m_i^2 + \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i \ln(N)_i \cdot \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i m_i - \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i a m_i \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} m_i = 0$$

$$a(\ldots) = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i m_i \ln(N_i) - \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i \ln(N)_i \cdot \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} m_i w_i$$

$$= a\left(-\frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i m_i \cdot \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} w_i m_i + \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} m_i^2\right)$$

Das $a(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2) = \langle m\cdot\ln(N)\rangle - \langle m\rangle\langle\ln(N)\rangle$

Das $a = \dfrac{\langle m\cdot\ln(N)\rangle - \langle m\rangle\cdot\langle\ln(N)\rangle}{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2}$

3

B $\langle m\cdot\ln(N)\rangle = \cancel{94{,}1786}$ 23,5445

$\langle m\rangle = 6{,}5$

$\langle\ln(N)\rangle = 4{,}00751$

$\langle m^2\rangle = 43{,}5$

$\langle m\rangle^2 = 42{,}25$

$a = \dfrac{\langle m\cdot\ln(N)\rangle - \langle m\rangle\,\langle\ln(N)\rangle}{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2}$

2 invullen geeft: $a = -2{,}35$